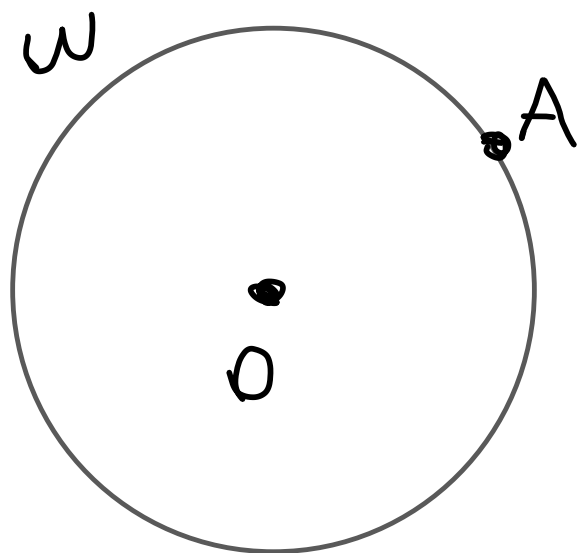


Теория множеств

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{Z}$$



$$A \in W$$

МНОГОЧЛЕН

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

a_i — числа x — переменная

$$f \text{ — корень} \Leftrightarrow p(f) = 0$$

$a_1 x + a_0 = 0$ - лин. уравнение

$ax + b = 0$ - задача с
параметрами

a, b - параметры

1) Пусть $a = 0$

$$b = 0$$

$$0 = 0$$

1.1) Пусть $b = 0 \Rightarrow$ Решение: $x \in \mathbb{R}$

1.2) $b \neq 0 \Rightarrow$ Решений нет $x \in \emptyset$

$$ax + b = 0$$

$$2) \quad a \neq 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Ответ:

при

$$a = 0 \text{ и } b = 0$$

x - любое число

при

$$a = 0 \text{ и } b \neq 0$$

решений нет

иначе

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, b, c - параметры

1) $a = 0$ $bx + c = 0$ - это уже
решено

2) $a \neq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Квадратное уравнение $(a \neq 0)$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\text{Пусть } p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\cdot x^2 + px + q = 0$$

$$\cdot \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}$$

$$x + \frac{p}{2} = \frac{\pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$x^2 = e$$

$$x = \pm \sqrt{e}$$

Рациональная др-я

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

P, Q - многочлены

Иррациональные др-я

$$\sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = (3-x)^2 \\ \cancel{x-1 \geq 0} \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 = 5$ - не подходит

$x_2 = 2$ - подходит

Примеры неэквивалентностей

$$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$$

$ABCD$ -ромб $\Rightarrow ABCD$ -паралелограмм

Показательно-степенная ф-я

$$a^x$$

$$a > 0, \quad a \neq 1$$

$$2^x$$

x - любое число

Логарифмическая оп-я

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

$$b > 0$$

Свойства логарифмов

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_{a^x}(b^y) = \frac{y}{x} \log_a b$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$\boxed{1.} \quad \sqrt{5x^2 + 3x - 1} - 2x = 1. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 3x - 1 = (2x + 1)^2 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

$$\boxed{7.} \quad 2\sqrt{x^2 - 4x + 7} - \sqrt{x^2 - 4x + 12} = 1.$$

$$t = x^2 - 4x + 7$$

$$2\sqrt{t} - \sqrt{t+5} = 1$$

$$2\sqrt{t} = \sqrt{t+5} + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t = t + 5 + 2\sqrt{t+5} + 1 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t = t + 5 + 2\sqrt{t+5} + 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{t+5} = 3t - 6 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t + 20 = 9t^2 - 36t + 36 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4t + 20 = 9t^2 - 36t + 36 \\ t \geq 2 \end{array} \right.$$

$$9t^2 - 40t + 16 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \frac{4}{9} \end{array} \right. \Leftrightarrow t = 4 \\ t \geq 2 \end{array} \right.$$

$$x^2 - 4x + 7 = 4$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Ответ: $\begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$$\boxed{9.} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^x + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^x = 4.$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 1$$

$$t = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$t^x + \left(\frac{1}{t} \right)^x = 4$$

$$t^x + \frac{1}{t^x} = 4$$

$$t^x + \frac{1}{t^x} = 4$$

Пусть $k = t^x > 0$

$$k + \frac{1}{k} - 4 = 0$$

$$\frac{k^2 - 4k + 1}{k} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 1 = 0$$

$$D = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$k = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$2 + \sqrt{3} = t^x = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^x$$

$$2 - \sqrt{3} = t^x \Rightarrow x = -2 \quad x = 2$$

Ответ: $\begin{bmatrix} x = 2 \\ x = -2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{6.} \quad 2 \log_3 \frac{x-3}{x-7} + \log_3 \frac{x-1}{x-3} = -1. \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \log_3 \frac{x-3}{x-7} =$$

$$= \log_3 \left(\left(\frac{x-3}{x-7} \right)^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x-7} > 0 \\ \frac{x-1}{x-3} > 0 \\ \cancel{x \neq 3} \\ \cancel{x \neq 7} \\ \log_3 \left(\frac{(x-3)(x-1)}{(x-7)^2} \right) = -1 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$$

$$\log_3 \left(\frac{(x-3)(x-1)}{(x-7)^2} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty) \\ \log_3 \left(\frac{(x-3)(x-1)}{(x-7)^2} \right) = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty) \\ \frac{(x-3)(x-1)}{(x-7)^2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-7)^2 = 3(x-3)(x-1) \\ x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty) \end{cases}$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 x_2 = -20$$

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ — не подходит}$$

Ответ: -5