

$$\log_a b = c$$

$$a^c = b$$

$$a > 0 \quad a \neq 1$$

$$b > 0$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_{a^x} (b^y) = \frac{y}{x} \log_a b$$

$$\bullet \log_4 3 = \frac{\log_k 3}{\log_k 4}$$

$$4 = K^{\log_k 4}$$

$$\begin{aligned} \log_4 3 &= \log_{K^{\log_k 4}} (3) = \\ &= \frac{\log_k 3}{\log_k 4} \end{aligned}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пусть  $c = b$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

- $\lg X = \log_{10} X$

$$\lg 1000 = 3$$

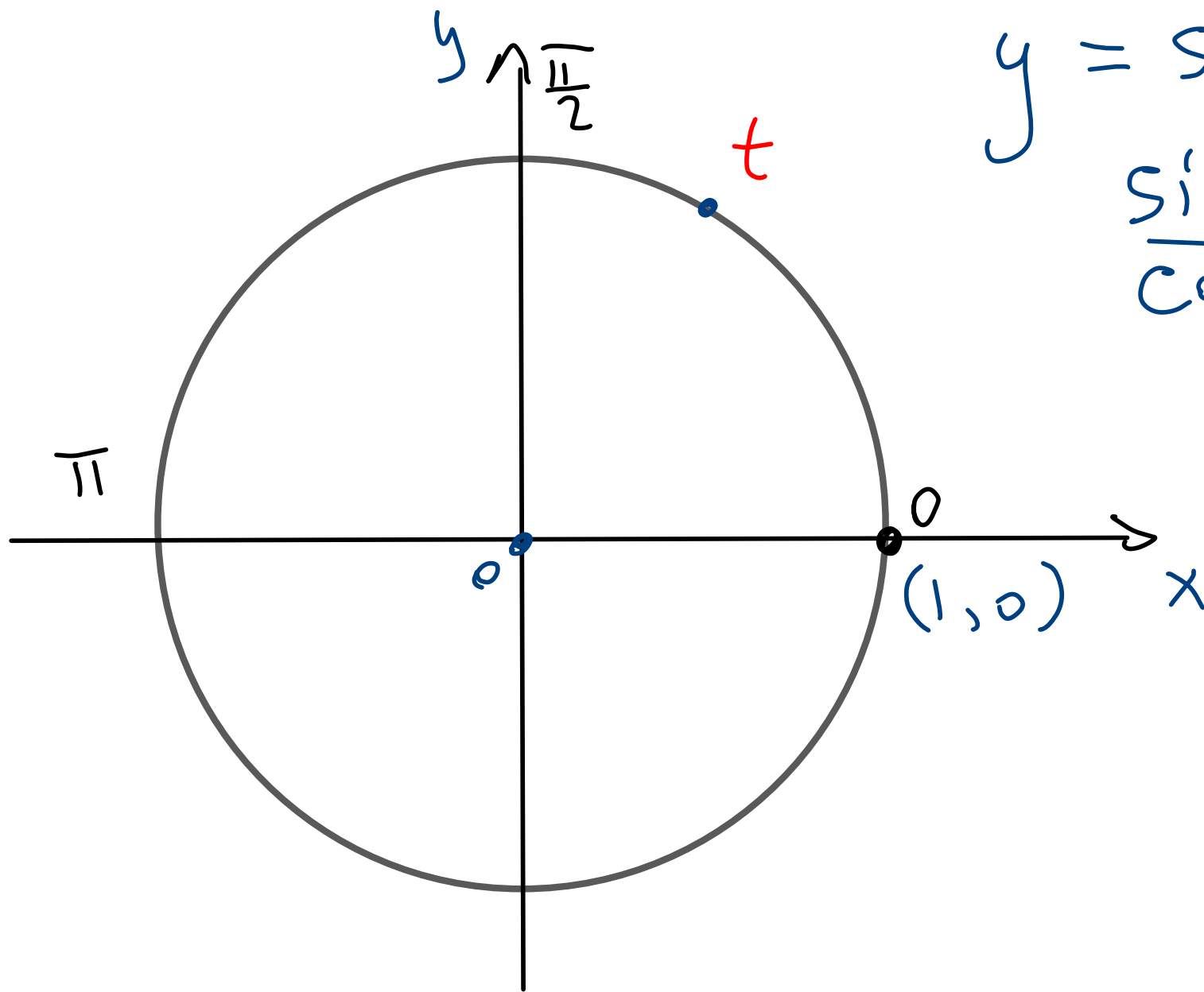
- $\ln X = \log_e X$

- $\log_2 X$

$$e \approx 2,71 \dots$$

$$\pi \approx 3,14 \dots$$

# Тригонометрия



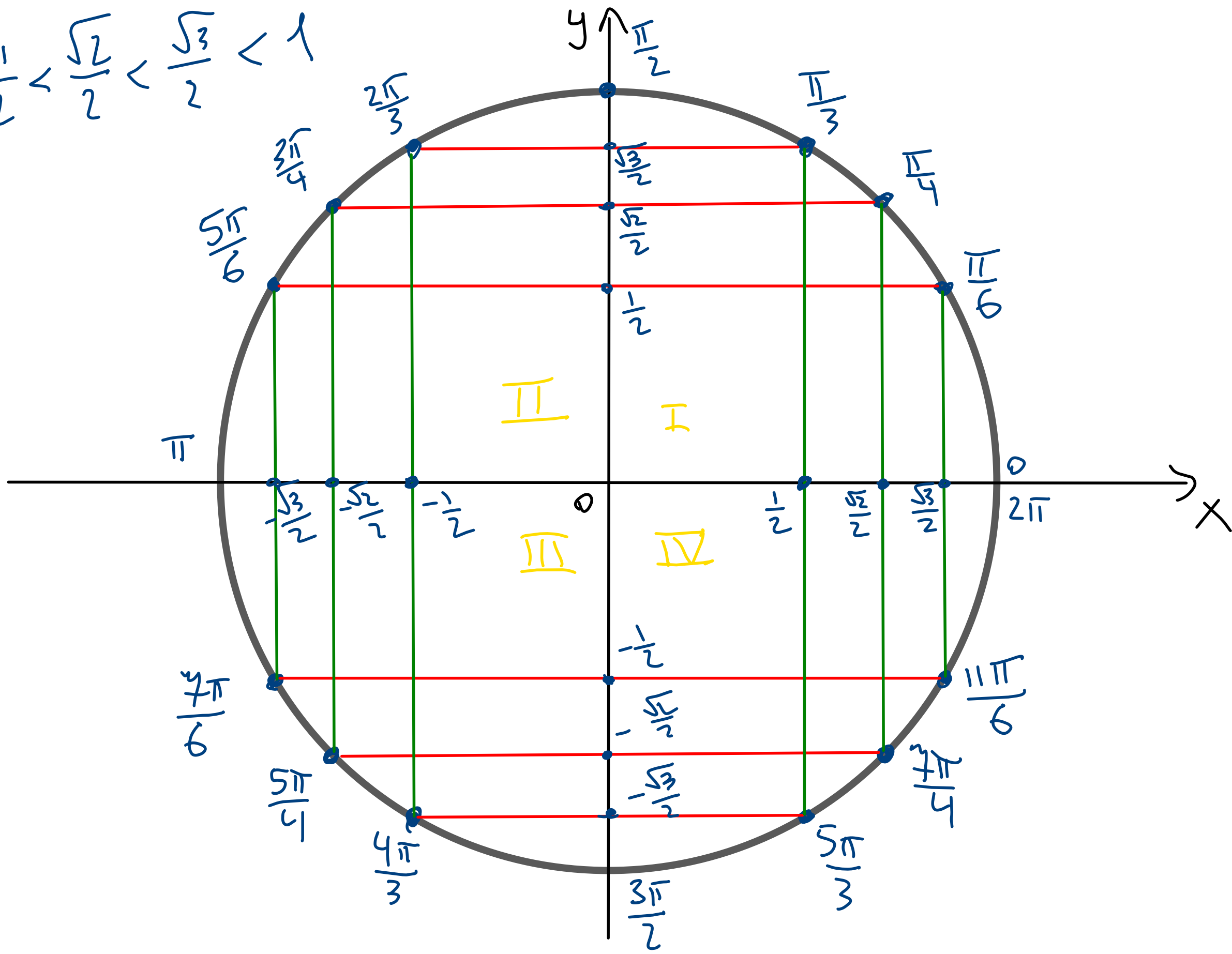
$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$$

$$\frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t$$

$0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$



**1** Корни  $x_1$  и  $x_2$  квадратного уравнения  $x^2 - 2rx - 7r^2 = 0$  удовлетворяют условию  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ . Найдите  $r$ .

$$D = 4r^2 + 28r^2 = 32r^2$$

$$\sqrt{D} = 4\sqrt{2}r$$

$$x_1 = \frac{2r + 4\sqrt{2}r}{2} = r + 2\sqrt{2}r = r(1 + 2\sqrt{2})$$

$$x_2 = r(1 - 2\sqrt{2})$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

**1**

Корни  $x_1$  и  $x_2$  квадратного уравнения  $x^2 - 2rx - 7r^2 = 0$  удовлетворяют условию  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ . Найдите  $r$ .

$$\text{Внет: } \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2r \\ x_1 x_2 &= -7r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \\ &= 4r^2 + 14r^2 = 18r^2 = 2 \end{aligned}$$

$$r^2 = \frac{1}{9} \quad \left[ \begin{aligned} r &= \frac{1}{3} \\ r &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \right. \text{ - Ответ.}$$

$$X_1^2 + X_2^2 = (X_1 + X_2)^2 - 2X_1X_2$$

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2$$

$$x+2, \quad x-1, \quad (x+2)(x-1)$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2 + 2(x-1) + (x+2)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x - 2}{(x-1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{6} \\ x = -2 + \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{(x-2)^2} = 0$$

если  $a$  - корень

$\Rightarrow$  многочлен делится на  $x-a$

$$1x^3 - 4x^2 + x + \underline{6}$$

$\frac{p}{q}$  - корень  $\Leftrightarrow$

$p$  делит 6

$q$  делит 1

-1 - корень.

Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots +$   
 $+ a_1 x + a_0$  — многочлен,

$$a_i \in \mathbb{Z}$$

Несократимая дробь  $\frac{p}{q}$  является

корнем  $f$  ( $f(\frac{p}{q}) = 0$ )  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$   $p$  — делитель  $a_0$ , и

$q$  — делитель  $a_n$ .

$$x^2 - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{(x-2)^2} = 0$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2 + x + 6 \\
 - x^3 + x^2 \\
 \hline
 -5x^2 + x + 6 \\
 - -5x^2 - 5x \\
 \hline
 6x + 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x+1 \\
 \hline
 x^2 - 5x + 6
 \end{array}$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{(x-2)^2} = 0$$

$$\frac{(x+1)(x^2-5x+6)}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}(x-3)}{(x-2)\cancel{}} =$$

$$= \frac{(x+1)(x-3)}{x-2} = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

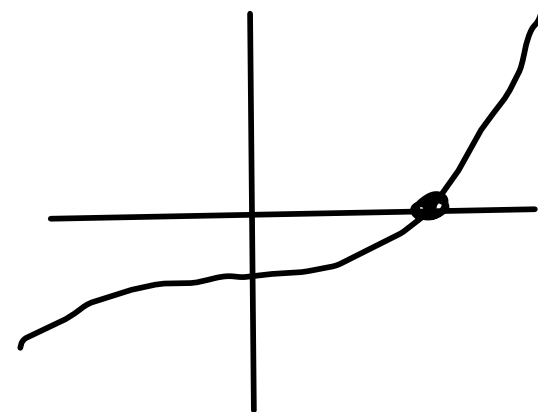
$$\overbrace{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2}}^{f(x)} = 0$$

$x = -1$  - корень уравнения

$\sqrt[3]{x}$  - возрастает

$\sqrt[3]{x+1}$  - возрастает

$\sqrt[3]{x+2}$  - возрастает



$f(x)$  возрастает  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  решение единственно

Ответ:  $x = -1$

$$\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1$$

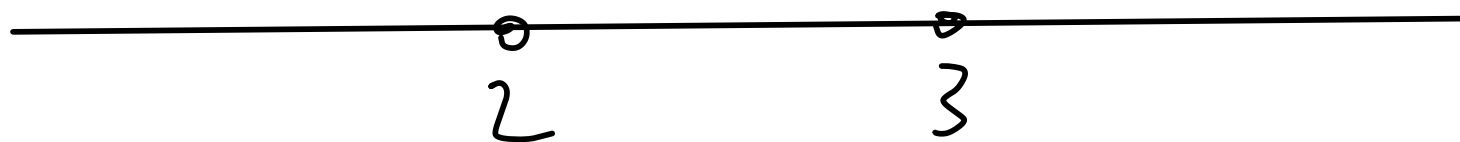
Пусть  $t = \sqrt{x+2}$   $t \geq 0$   
 $t^2 = x+2$   $x \geq -2$

$$\sqrt{t^2 + 4 - 4t} + \sqrt{t^2 + 9 - 6t} = 1$$

$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1$$

$$|t-2| + |t-3| = 1$$

$$|t-2| + |t-3| = 1$$



1) Пусть  $t \geq 3$

$$2t - 5 = 1 \quad t = 3$$

2) Пусть  $2 \leq t < 3$

$$1 = 1 \Rightarrow t \in [2; 3) - \text{решение}$$

3) Пусть  $t < 2$

$$-2t + 5 = 1 \Rightarrow t = 2 - \text{не подходит.}$$

---


$$t \in [2; 3]$$

$$t = \sqrt{x+2}$$

$$2 \leq \sqrt{x+2} \leq 3$$

Ответ:  $2 \leq x \leq 7$

$$x \in [2; 7]$$

$$|2x + 3| = |2x - 5|$$

Идея:  $a, b \in \mathbb{R}$



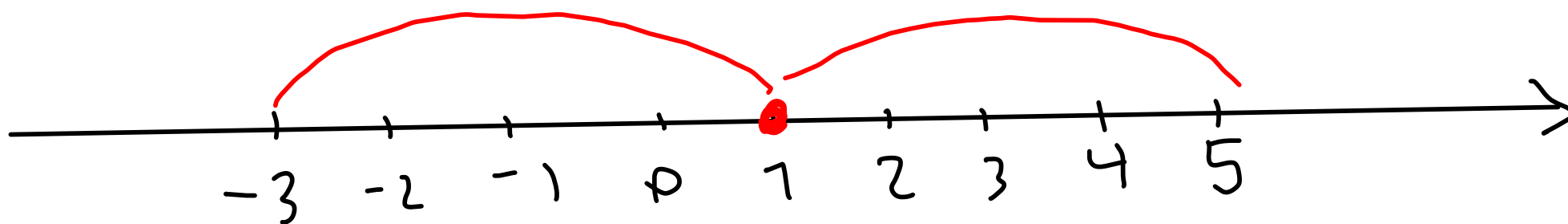
если  $b \geq a$ , то расстояние  
между ними равно  $b - a$

$b < a$ , то  $a - b$

Расстояние равно  $|a - b|$

$$|2x + 3| = |2x - 5|$$

Задача: расстояние от  $2x$  до  $-3$   
равно расстоянию от  $2x$  до  $5$



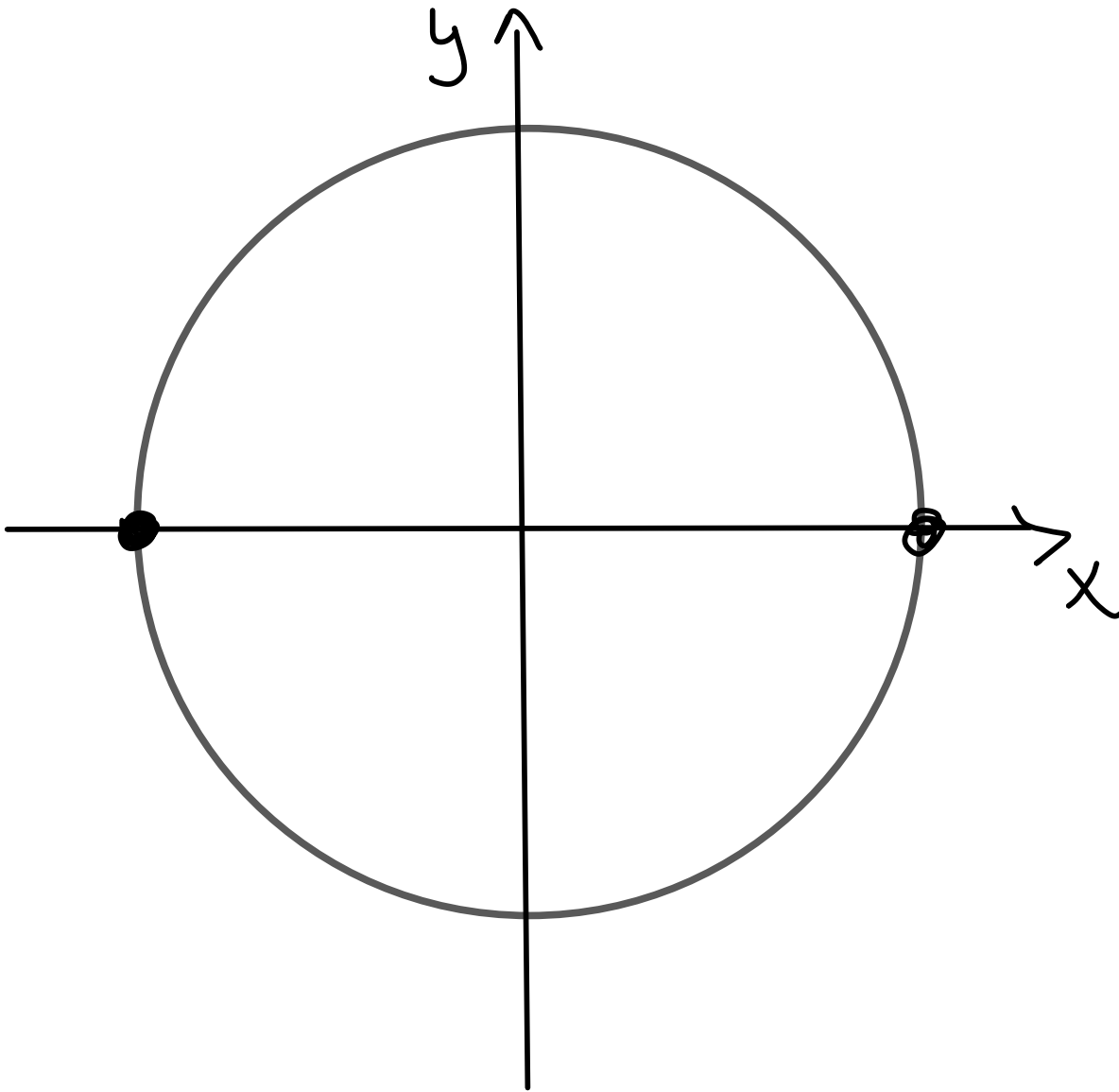
$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{3x}{2} = 0$$

$$\frac{3x}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{3} \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$2 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = 5 \sin^2 x \quad | : \sin^2 x$$

$\sin x = 0$  - не является решением.  
 $\Rightarrow$  делим на  $\sin^2 x$

$$\frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x} + 3 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 5 = 0$$

Пусть  $t = \operatorname{ctg} x$

$$2t^2 + 3t - 5 = 0$$

$$2 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = 5 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \sin x \cos x - 5 \sin^2 x = 0$$

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) + 5 \sin x (\cos x - \sin x) =$$

$$= (\cos x - \sin x)(2 \cos x + 5 \sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = \sin x \\ 2 \cos x = -5 \sin x \end{cases}$$

15

Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\frac{\lg(ax)}{\lg x + 1} = 2 \quad \Leftrightarrow$$

имеет ровно один корень.

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(ax) - 2\lg x - 2}{\lg x + 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lg(ax) - 2\lg x - 2 = 0 \\ \lg x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(ax) - 2\lg x - 2 = 0 \\ x \neq \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg ax - \lg x^2 = 2 \\ x > 0 \\ a > 0 \\ x \neq \frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg \frac{a}{x} = 2 \\ x > 0 \\ a > 0 \\ x \neq \frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{Q = 100x} \\ x \geq 0 \\ Q > 0 \\ x \neq \frac{1}{10} \end{cases}$$

Ответ:

$$Q \in (0; 10) \cup (10; +\infty)$$